
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2025-2026

Série 1: Systèmes linéaires I

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) reconnaître un **système d'équations linéaires (SEL)** et l'écrire sous **forme matricielle** ;
- (O.2) **représenter graphiquement les solutions** d'un SEL avec 2 variables ;
- (O.3) connaître les SEL **incompatibles** et **compatibles, déterminés** et **indéterminés** ;
- (O.4) connaître la notion de **SEL équivalents**, les **opérations élémentaires**, leur propriété fondamentale, et les **matrices échelonnées** et **échelonnées réduites**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- système d'équations linéaires (SEL)
- représentation matricielle d'un SEL
- SEL compatible in/déterminé
- opération élémentaire sur les lignes
- forme/matrice échelonnée
- solution d'un SEL
- matrice augmentée
- SEL incompatible
- SEL équivalents
- forme/matrice échelonnée réduite

Noyau d'exercices

Exercice 1 (Équations linéaires et non linéaires)

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

- (a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$;
- (b) $2^2x_1 + 2^2x_2 = 1$;
- (c) $\sqrt{3}x_1 + (1 - \sqrt{2})x_2 + 3 = \pi x_1$;
- (d) $3x_1 + 2x_2 + 4x_3x_4 = 5$;
- (e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}x_3 + x_9$.

Exercice 2 (Systèmes d'équations linéaires)

Remplissez les informations manquantes pour chacun des systèmes linéaires ci-dessous.

- (a) $m = _$ équations et $n = _$ variables,

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_3 & = & 5 \\ & x_2 & & = & 2 \end{cases} \text{ avec coefficients } a_{1,1} = _, a_{1,2} = _, a_{1,3} = _, \text{ et } b_1 = _, \\ a_{2,1} = _, a_{2,2} = _, a_{2,3} = _, \text{ et } b_2 = _.$$

Vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est une solution du SEL précédent.

Est-ce que $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est une solution du SEL précédent ?

(b) $m = _ \text{ équations et } n = _ \text{ variables,}$

$$\begin{cases} x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & = & -1/2, \\ 2x_1 & - & x_2 & = & -5, \end{cases} \text{ avec coefficients } a_{1,1} = _, a_{1,2} = _, \text{ et } b_1 = _, \\ a_{2,1} = _, a_{2,2} = _, \text{ et } b_2 = _.$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

(c) $m = _ \text{ équations et } n = _ \text{ variables,}$

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & = & 3, \end{cases} \text{ avec coefficients } a_{1,1} = _, a_{1,2} = _, \text{ et } b_1 = _, \\ a_{2,1} = _, a_{2,2} = _, \text{ et } b_2 = _.$$

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution du SEL précédent. Donner la/les solution(s) du système s'il y en a d'autres.

(d) $m = _ \text{ équations et } n = _ \text{ variables,}$

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & = & 1, \\ x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & = & \frac{1}{3}, \end{cases} \text{ avec coefficients } a_{1,1} = _, a_{1,2} = _, \text{ et } b_1 = _, \\ a_{2,1} = _, a_{2,2} = _, \text{ et } b_2 = _.$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

Exercice 3 (Représentation graphique I)

Soient les deux droites d'équations respectives $\frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6$ et $x_1 + 2x_2 = 4$. Représenter graphiquement les deux équations dans un système d'axes x_1 et x_2 et déterminer le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice 4 (Représentation graphique II)

On considère l'équation $ax_1 + bx_2 = 2$.

- (a) Représenter dans le plan les solutions pour les valeurs $a = 2$ et $b = -1$.
- (b) Représenter dans le plan les solutions pour les valeurs $a = 1$ et $b = 2$.
- (c) Estimer géométriquement la solution du système

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & = & 2, \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 2, \end{cases}$$

à partir des items précédents, et résoudre le système.

Exercice 5 (Représentation graphique III)

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

- (a) Dessiner la solution pour les paramètres $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

- (b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?
 (c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le SEL

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -1, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = 1, \\ (\alpha - 1)x_1 + (\beta + 1)x_2 = 0, \end{cases}$$

- (i) possède une infinité de solutions ;
 (ii) ne possède aucune solution ;
 (iii) possède une solution unique.

Exercice 6 (Représentation graphique IV)

Considérons le SEL

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$$

- (a) Est-ce que le système est compatible ?
 (b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 7 (Formes ER de matrices carrées de taille 3)

Déterminer toutes les matrices carrées échelonnées réduites de taille 3.

 **Pour compléter la pratique**

Exercice 8 (V/F sur systèmes d'équations linéaires)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- (a) Un SEL avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution.
 (b) Un SEL avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution.
 (c) L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues.
 (d) L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues.
 (e) L'équation $\cos(x) = 0$ est une équation linéaire à une inconnue.
 (f) L'équation $x = 1$ est une équation linéaire à une inconnue, les équations $y = -1$ et $z = 5$ également, mais le système d'équations

V	F
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 5, \end{cases}$$

est un SEL de trois équations à trois inconnues.

Exercice 9 (V/F sur opérations élémentaires et ensemble des solutions)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du SEL associé. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) Une matrice de taille 5×6 a 6 lignes. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) L'ensemble des solutions d'un SEL en les variables x_1, \dots, x_n est une liste de nombres (s_1, \dots, s_n) qui, substitués à x_1, \dots, x_n respectivement, rendent correcte chaque équation du SEL. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (e) L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un SEL. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (f) Un SEL incompatible a plus d'une solution. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |